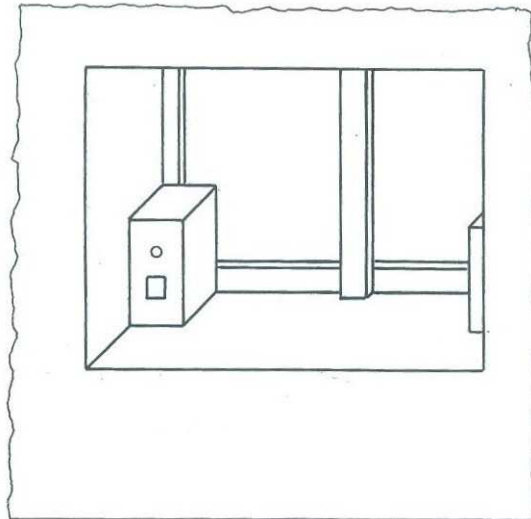


EGY „ABLAK - GEOMETRIAI” PROBLÉMA

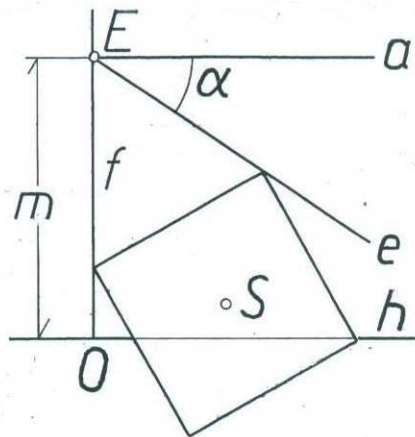
Írta: *Hajdu Endre*

A számítógépemhez tartozó két hangfal – egy-egy négyzet keresztmetszetű hasáb – hely -
szűke miatt az ablakpárkányon van elhelyezve (1. ábra).



1. ábra

Hogy az ablakszárnyak α „kitárási szöge” a szellőztetéskor minél nagyobb legyen, a hangfalakat el kell mozdítani, de a csatlakozó vezetékek csupán kisebb elmozgatást tesznek lehetővé, mégpedig olyanokat csak, melyek során a hasáb alapnégyzetének S súlypontja az ablakpárkány h határvonalán belül marad, hiszen különben a test lezuhanna (2. ábra).



2. ábra

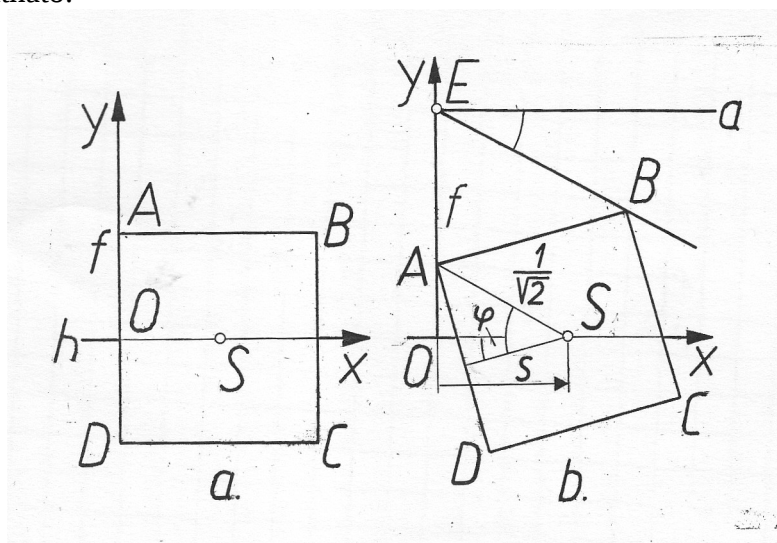
Mélyebb megfontolások nélkül is nyilvánvaló az, hogy az imént említett feltételen kívül a hasábnak minél közelebb kell lennie az ablakmélyedés oldalfalához, vagyis az f egyenes -
hez, és szükségesnek mutatkozhat a hasábnak a szimmetriatengelye körüli elfordítása is.
A hasáb legkedvezőbb, vagyis a legnagyobb α szöget biztosító helyzetének meghatározása geometriai feladat, melynek lényege a következőképpen fogalmazható meg: helyezzünk el egy d oldalhosszúságú négyzetet a 2. ábra a , f , h egyeneseihez képest (a az ablak síkjának, f az ablakmélyedés oldalsíkjának, h az ablakpárkány határvonalának vetülete) úgy, hogy:
- a négyzet középpontja a h egyenesen legyen,

- a négyzet egy csúcsa az f egyenesen legyen, vagy egyik oldala illeszkedjen az O ponthoz,
- az a, f egyenesek közös E pontjához illeszkedő e (fél-) egyenes oly módon legyen a négyzetnek támaszegyenese, hogy az a egyenessel bezárt α szöge a lehető legnagyobb legyen.

Az általánosság kedvéért a méretekkel kapcsolatban csak annyi kikötést teszünk, hogy az ablakmélyedés m mérete nagyobb legyen, mint $d/2$.

Nyilvánvaló, hogy a négyzet keresett helyzetében az e egyenes a négyzet egy vagy két csúcsához illeszkedik, ezért először a négyzet szóba jöhető csúcsainak lehetséges helyzeteit vizsgáljuk. Az is valószínűnek tűnik, hogy a négyzet legkedvezőbb helyzetének meghatározása nem csupán a súlypont helyének, vagyis az f egyenestől mért távolságának megállapítását jelenti, hanem a négyzet S körüli φ elforgatási szögének kiszámítását is.

A továbbiakban az egységnyi oldalhosszúságúnak tekintett négyzet kiinduló helyzete legyen a 3/a ábrán látható.



3. ábra

A négyzet elmozgatása két módon lehetséges: a súlypont egyenes vonalú mozgása a négyzet pozitív értelmű (az óramutató járásával ellentétes irányú) forgásával párosul, vagy negatív értelművel. A négyzet pozitív értelmű mozgása során az A csúcs az y tengelyen mozog, miközben S az x tengelyen. A 3/b ábra koordináta-rendszerében a súlypont $x_s = s$ koordi-

nátája és az elforgatás φ szöge közti kapcsolat $s = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(45^\circ - \varphi)$, amelyből átalakítás után

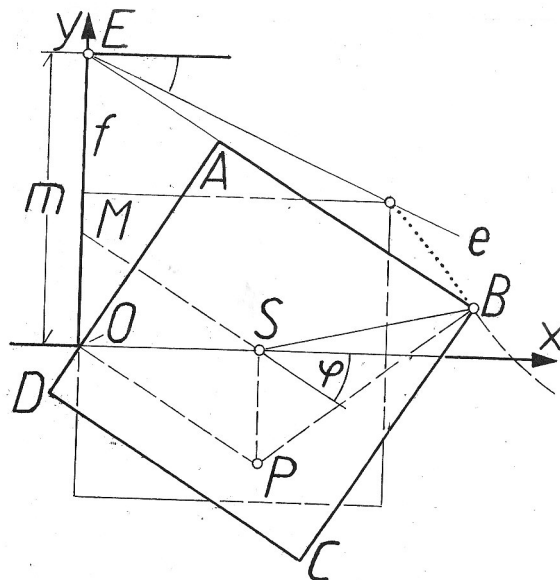
$$s = \frac{\sqrt{1 + \sin 2\varphi}}{2}.$$

A négyzet negatív értelmű elforgatása esetén a 4. ábra alapján

$$s = \frac{1}{2 \cos \varphi}.$$

Akár $+$, akár $-$ értelmű elforgatással párosul a négyzet elmozgatása, $m > 1/2$ esetén az e egyenes keresett helyzete egybeesik a négyzet egyik oldalegyenesével. Ugyanis egy adott m értékhez, vagyis adott E csuklóponthoz tartozó támaszegyenes helyzete mindaddig javítható, vagyis az α szög növelhető, míg az egyenes csak egy négyzetcsúcsához illeszkedik (4. ábra).

Ha már két csúcsához illeszkedik az egyenes, helyzete tovább nem javítható, további elmozgatás az α szög csökkenésével jár.



4. ábra

Ezek után vizsgáljuk meg, hogy növekvő m értékek esetén a négyzet milyen elmozgatása szükséges a lehető legnagyobb α szög eléréséhez! Kezdetben, vagyis kis m értékeknél a támaszegyenes a négyzet B csúcsához illeszkedik, ezért először e pont mozgásával foglalkozunk. A négyzet lehetséges elmozgatása most a negatív előjelű elforgatással párosult eltolódás (4. ábra), melynek során a négyzet AD oldalegyenese az origóhoz illeszkedik. A B csúcs pályájának egyenlete most

$$x = \frac{0,5}{\cos \varphi} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(45^\circ - \varphi), \text{ vagy } x = \frac{0,5}{\cos \varphi} + \frac{1}{2} (\cos \varphi + \sin \varphi),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(45^\circ - \varphi), \text{ vagy } y = \frac{1}{2} (\cos \varphi - \sin \varphi).$$

A pályagörbe létező íve a $-45^\circ \leq \varphi \leq 0^\circ$ elfordulási szögekhez tartozó pontokból áll. Érdeemes kitérni a B csúcs pályagörbéjének érintőszerkesztésére, mert ez a görbe nem közismert.

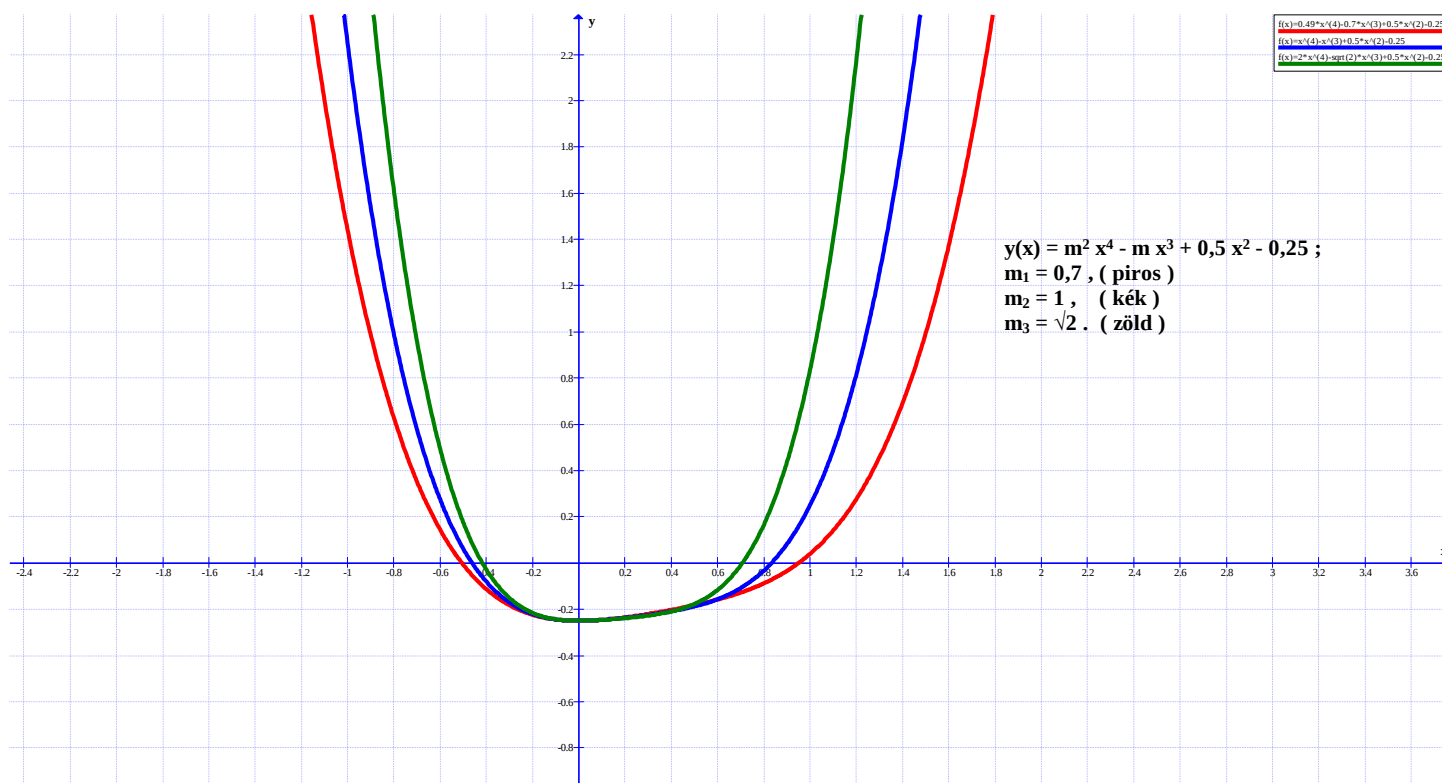
A mozgó négyzet pillanatnyi sebességpólusát a négyzet két pontja sebességvektorának ismert állása birtokában határozzuk meg. Ez a két pont az S súlypont és az AD oldálnak az origóval egybeeső pontja. Ezen pontokban a sebességvektorokra állított merőleges egyenesek metszéspontja a négyzet mozgásának pillanatnyi P sebességpólusa. A PB pólussugárra állított merőleges egyenes a pályagörbe B -beli érintője (mely az ábrába nincs berajzolva). A pályagörbe létező ívét pontozott vonal ábrázolja. A φ szög és az $m = ME + OM$ távolság kapcsolata

$$m = \frac{0,5}{\cos \varphi} + s \cdot \operatorname{tg} \varphi, \text{ és mivel } s = \frac{1}{2 \cos \varphi},$$

$$m = 0,5 \cdot \frac{\sin \varphi + \cos \varphi}{\cos^2 \varphi}, \text{ } \cos \varphi = z \text{ jelöléssel a szükséges műveletek elvégzése után az}$$

$$m^2 z^4 - m z^3 + 0,5 z^2 - 0,25 = 0 \quad \dots\dots\dots 1.$$

egyenletre jutunk. A megfelelő függvényábrát néhány m értékre az 5. ábra szemlélteti.

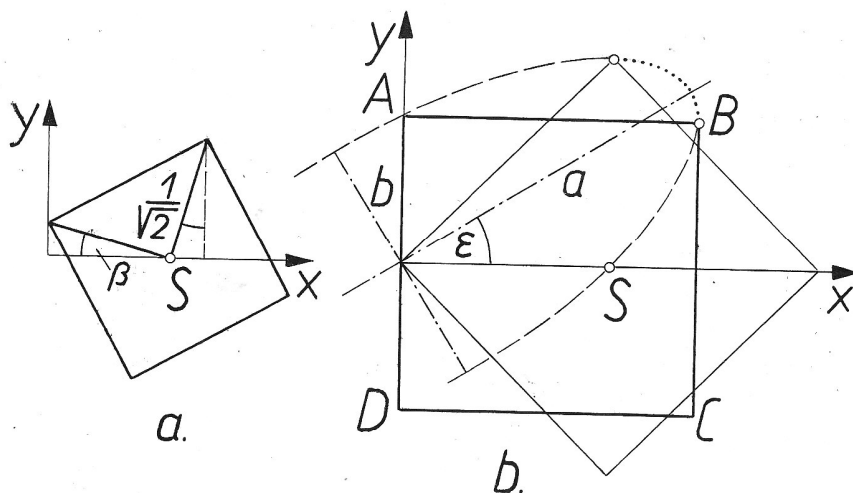


5. ábra

Ha $-45^\circ \leq \varphi \leq 0^\circ$, akkor $\cos \varphi$ a fenti negyedfokú egyenlet (valós) gyöke, $|\varphi|$ egyben a keresett α szöggel egyenlő. A súlypont távolsága $s = \frac{1}{2z}$.

Ha $m \geq \sqrt{2}$, akkor pozitív értelmű elforgatással párosul a súlypont eltolása. A 6/a ábra alapján a B csúcspont koordinátái $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \beta + \sin \beta)$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \beta$.

Kiküszöbölve a β paramétert, az $x^2 + 2y^2 - 2xy - \frac{1}{2} = 0$ egyenletre jutunk. A pályagörbe tehát olyan ellipszis egy része, melynek középpontja az origó, nagytengelyének egyenese az x tengellyel közelítőleg $\varepsilon = 31,72^\circ$ -ot zár be, fél tengelyhosszai $a = 1,62$, $b = 0,62$ (6/b ábra).



6. ábra

A B csúcs által ténylegesen leírt pályagörbét pontozott vonal ábrázolja.
Az ellipszis adataival kapcsolatos számítás részletesen megtalálható például az ismert Thomas-féle KALKULUS 3. kötetében.

Pozitív értelmű elforgatás esetén: $s = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(45^\circ - \varphi) = \frac{1}{2} (\cos \varphi + \sin \varphi)$,

$$\text{rendezve: } \varphi = \frac{1}{2} \arcsin(4s^2 - 1).$$

A φ szög és az m távolság kapcsolata most:

$$m = \frac{1}{\sin \varphi} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi \right).$$

Rendezés és a $\sin \varphi = u$ jelölés bevezetése után az

$$m = \frac{1}{u} + \frac{1}{2} (\sqrt{1-u^2} - u),$$

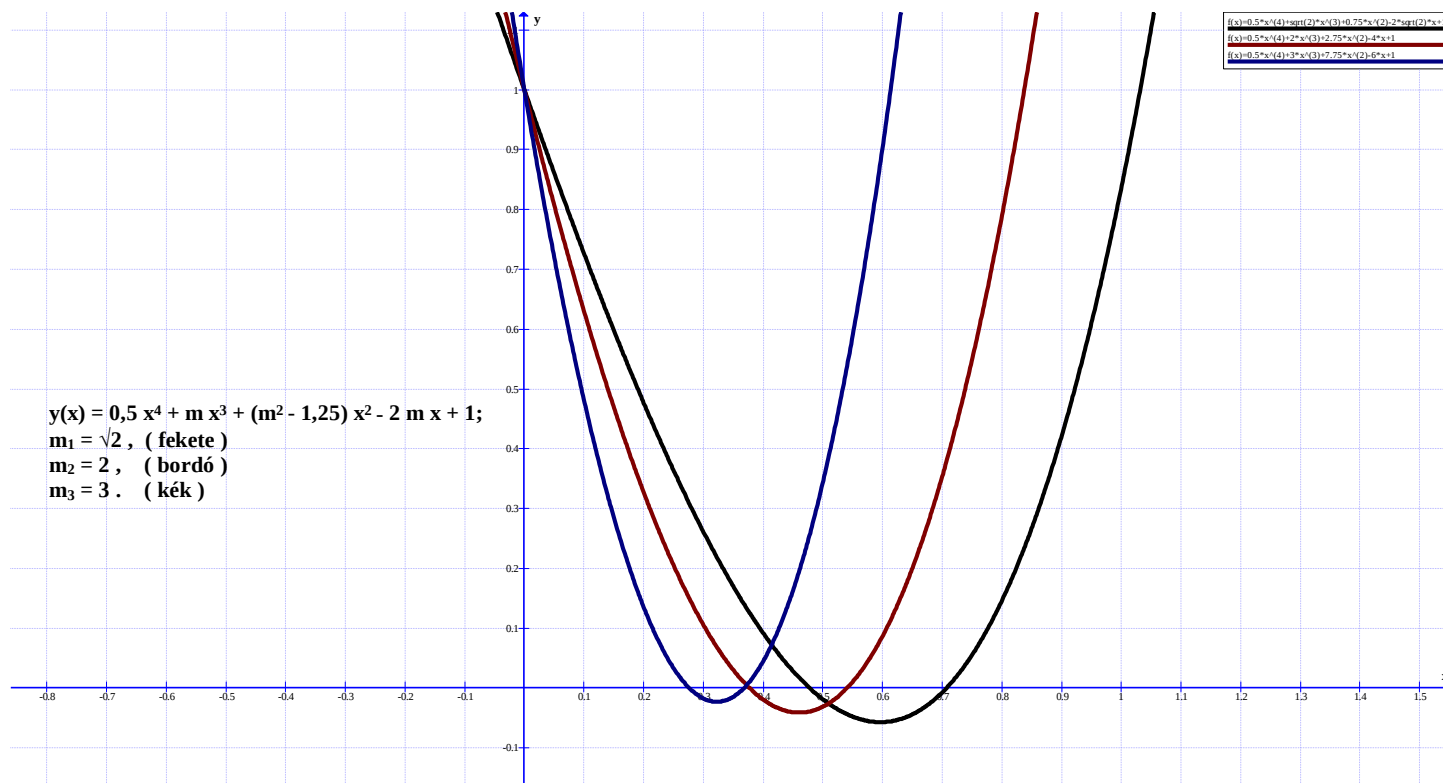
végül a

$$0,5 \cdot u^4 + m \cdot u^3 + (m^2 - 1,25) \cdot u^2 - 2 \cdot m \cdot u + 1 = 0 \dots\dots\dots 2.$$

egyenletre jutunk. Ennek az egyik valós gyöke adja az adott m értékhez tartozó elforgatás szögének sinusát, a $\varphi = \arcsin u$ elforgatáshoz tartozó elmozdulás pedig $s = \frac{\sqrt{1 + \sin 2\varphi}}{2}$.

Az m értékhez tartozó α szög most $\alpha = 90^\circ - \varphi$.

A fenti 2. , szintén negyedfokú egyenlet grafikonját a 7. ábra szemlélteti néhány m értékre.



7. ábra

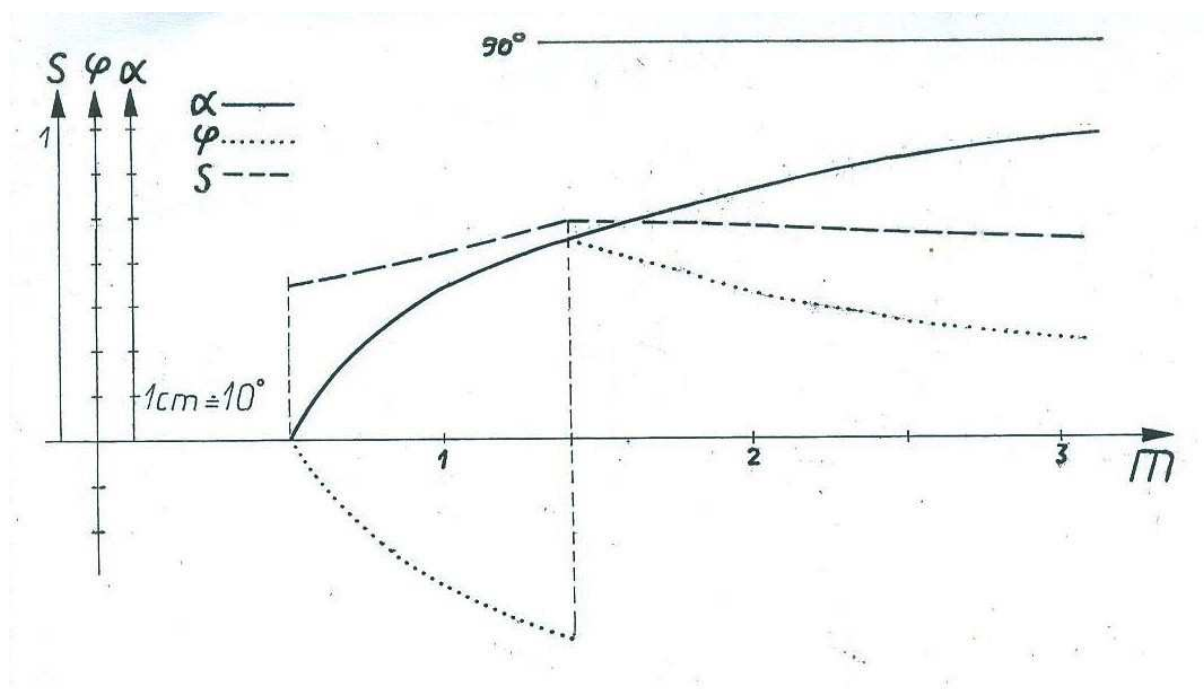
Az $\alpha(m)$ FÜGGVÉNY

Rátérünk tulajdonképpeni feladatunk gyakorlati végrehajtására, vagyis egy tetszőleges m méret esetén a legnagyobb lehetséges α szög megállapítására.

Ha $0,5 \leq m \leq \sqrt{2}$, akkor az 1. egyenlet z_1 gyökével: $\alpha = \arccos z_1$.

Ha $\sqrt{2} \leq m$, akkor a 2. egyenlet u_2 gyökével: $\alpha = 90^\circ - \arcsin u_2$.

A 8. ábra szerkesztéssel nyert adatok alapján szemlélteti az $\alpha(m)$ függvényt, feltüntetve a megfelelő φ és s értékeket is.



8. ábra

Sopron, 2014. április 24.